

Ćwiczenia 2 - zadania, Bartosz Naskręcki

Oznaczenia:

- $f : D \rightarrow P$ – f to funkcja o dziedzinie D i przeciwdziedzinie P
- $f(D)$ – zbiór wartości funkcji f przyjmowanych na dziedzinie D
- $\sin x$ – sinus kąta x , $\cos x$ – kosinus kąta x , $\operatorname{tg} x$ – tangens kąta x , $\operatorname{ctg} x$ – kotangens kąta x
- $|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ – wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x

Zadanie 1. Narysuj wykres funkcji, podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę, wyznacz zbiór wartości, miejsca zerowe, wartość najmniejszą i największą w przedziale $\langle -1, 2 \rangle$, wartość najmniejszą i największą w dziedzinie, określ monotoniczność funkcji

1. $f(x) = 2x - 1$
2. $f(x) = x^2 + 2$
3. $f(x) = 2^{x-2}$
4. $f(x) = 2^x - 2$
5. $f(x) = \frac{3}{x}$
6. $f(x) = \log_3 x$
7. $f(x) = \sqrt{x}$

Zadanie 2. Określ zbiór wartości funkcji.

1. $f(n) = n^2$, $D = \{1, 2, 3\}$
2. $f(n) = 1/n$, $D = \mathbb{Z}$
3. $f(n) = 0$, $D = \mathbb{R}$
4. $f(n) = \operatorname{NWD}(n, 2)$, $D = \mathbb{N}$
5. $f(n) = \frac{n^2-1}{(n-1)(n+1)}$, $D = \mathbb{Z}$

Zadanie 3. Sprawdź czy podane przyporządkowanie jest funkcją i zapisz wzorem.

1. Liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej kwadrat.
2. Ułamkowi wymiernemu przyporządkowujemy jego mianownik.
3. Promieniowi r okręgu przyporządkowujemy wartość liczbową ograniczonego przez niego koła.
4. Liczbie naturalnej przyporządkowujemy zbiór liczb naturalnych przez nią podzielnych.

Zadanie 4. Wyznacz równanie jawne funkcji liniowej przy podanych warunkach:

1. kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX wynosi 45° i wykres ma miejsce zerowe w punkcie $(x, y) = (1, 0)$
2. funkcja jest malejąca i przechodzi przez punkt $(0, 1)$
3. funkcja przechodzi przez punkty $(2, 3)$ i $(1, -1)$
4. funkcja przechodzi przez punkty $(2, 0)$ i $(3, 0)$

Zadanie 5. Znajdź wierzchołek paraboli oraz miejsca zerowe:

1. $y = 2x^2$
2. $y = x^2 + 2$
3. $y = (x + 1)^2 - 3$
4. $y = -x^2 + 3$

Zadanie 6. Przekształć funkcję uwikłaną $F(x, y) = 0$ do postaci jawnej $y = f(x)$ w określonej dziedzinie D i przeciwdziedzinie P

1. $x^2 + y^2 = 1$, $D = \langle -1, 1 \rangle$, $P = \langle 0, 1 \rangle$
2. $xy = 1$, $D = (0, 1)$, $P = (1, \infty)$
3. $1 + 2x + x^2 - 4y + y^2 = 0$, $P = \langle 2, 4 \rangle$

Zadanie 7. Przekształć funkcję uwikłaną $F(x, y) = 0$ do postaci parametrycznej $x = f(t)$, $y = g(t)$ przy określonej dziedzinie D parametrów t

1. $x^2 + y^2 = 1$, $D = (-\infty, \infty)$
2. $x^2 + y^2 = 1$, $D = \langle 0, 2\pi \rangle$
3. $y + x = 0$, $D = (0, 1)$

Zadanie 8. Rozwiąż nierówności w zbiorze M

1. $M = \mathbb{R}, |x| < 1$
2. $M = \langle -2, 2 \rangle, |x + 1| > 2$
3. $M = \mathbb{N}, \log_{10} x > 5$
4. $M = \mathbb{R}, (x + 1)(x + 2) > 0$
5. $M = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{x+1}{x-2} > 0$

Podstawy wzory trygonometryczne:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Zadanie 9. Określ dziedzinę funkcji, przeciwdziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
2. $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$
3. $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
4. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 3}$

Zadanie 10. Narysuj wykres funkcji w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$

1. $f(x) = -\cos 2x$
2. $f(x) = \sin |x|$
3. $f(x) = |\operatorname{tg} x|$
4. $f(x) = \sin x/2$
5. $f(x) = |2 \operatorname{tg}(-x)|$

Zadanie 11. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

1. $\sin \alpha = -0,6, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$
2. $\operatorname{tg} \alpha = -0,75, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$
3. $\cos \alpha = -5/13, \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$
4. $\operatorname{ctg} \alpha = 2, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

Zadanie 12. Uprość wyrażenie.

1. $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$
2. $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$
3. $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
4. $\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$
5. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Zadanie 13. Rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych.

- $\sin x = 0$
- $\cos x = 1$
- $\cos \frac{1}{2}x = -1$

- $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$
- $\sin^2 x + \cos^2 x + 1 = 0$

Zadanie 14. Naszczuj zbiory w kartezjańskim układzie współrzędnych.

1. $\{(x, y) : y = 2x + 1\}$
2. $\{(x, y) : y \leq 2x + 1\}$
3. $\{(x, y) : x = 2\}$
4. $\{(x, y) : x \geq 2\}$
5. $\{(x, y) : x^2 + y^2 = a\}$, gdzie $a \in \{-1, 0, 1\}$
6. $\{(x, y) : x^2 = y^2\}$
7. $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
8. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
9. $\{(x, y, z) : x + y = 0\}$
10. $\{(x, y, z) : y = x\}$

Zadanie 15. Naszczuj zbiory zadane w biegunowym układzie współrzędnych

1. $\{(r, \alpha) : r = 1\}$
2. $\{(r, \alpha) : r = 0\}$
3. $\{(r, \alpha) : 0 \leq \alpha \leq \pi/2, r = 2\}$
4. $\{(r, \alpha) : r = \alpha\}$

Zadanie 16. Zamień współrzędne biegunowe punktu na współrzędne kartezjańskie

1. $(r, \alpha) = (1, \pi/2)$
2. $(r, \alpha) = (0, 2/3\pi)$
3. $(r, \alpha) = (2, 2\pi)$
4. $(r, \alpha) = (0,1, t)$

Zadanie 17. Naszczuj zbiory na płaszczyźnie.

1. $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(r, \alpha) : r \leq 1\}$
3. $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\} \cap \{(r, \alpha) : r \leq 2\}$
4. $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2\}$
5. $\{(x, y) : y \geq 0\} \cap \{(x, y) : x \geq 0\} \cap \{(x, y) : x + y - 1 \leq 0\}$
6. $\{(x, y) : |x \cdot y| \leq 1\}$
7. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y, z) : z \in \langle -1, 1 \rangle\}$
8. $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{(x, y, z) : z \in \langle 0, 1 \rangle\}$
9. $\{(r, \alpha) : 1 \leq r \leq 2\} \cap \{(x, y) : y > 0\}$