

## Ćwiczenia 1 - zadania, Bartosz Naskręcki

### Oznaczenia:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , zbiór liczb naturalnych wraz z zerem
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ , zbiór liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ , zbiór liczb rzeczywistych

Zachodzą inkluzje

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

### Wzory skróconego mnożenia

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .
- $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .
- $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

**Zadanie 1.** Dla podanych zbiorów  $A, B, C$  wyznacz  $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C, A \setminus B, A \setminus C, B \setminus A, B \setminus C, C \setminus A, C \setminus B, A \setminus (B \cup C), B \setminus (A \cup C)$  i  $C \setminus (A \cup B)$ .

1.  $A = \langle 1, 2 \rangle, B = (1, \infty), C = (-1, 4)$ .
2.  $A = \langle 2, \infty \rangle, B = (-\infty, \frac{7}{3}), C = (-\frac{5}{2}, 7)$ .
3.  $A = (-\pi, 2\pi), B = (-\infty, 2), C = \langle 0, 1 \rangle$ .
4.  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}, C = \mathbb{Q}$ .
5.  $A = \mathbb{N}, B = (1, \infty), C = (-\infty, \frac{3}{2})$ .
6.  $A = \mathbb{Q}, B = \{-3, -1, 3\}, C = (-\infty, 2)$ .

**Zadanie 2.** Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór  $A \times B$ , gdzie

1.  $A = (-\infty, 2), B = \{2, 4, 8\}$
2.  $A = (-\infty, 0), B = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$
3.  $A = \mathbb{R} \setminus (-\infty, 3), B = \langle 1, 4 \rangle$
4.  $A = (-\pi, 2\pi), B = \{2\} \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$
5.  $A = \langle -8, -1 \rangle \cup (2, 3), B = \langle -1, 2 \rangle \cup (3, 4)$
6.  $A = \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, B = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$

**Zadanie 3.** Zaznaczyć w  $\mathbb{R}^3$  zbiory

1.  $A \times B \times C$ , gdzie,  $A = B = (0, 1), C = \langle 0, 1 \rangle$
2.  $A \times B \times C$ ,  
gdzie  $A = \langle 1, 2 \rangle, B = (1, 3), C = \langle -1, 1 \rangle$
3.  $A \times A \times A \setminus B \times B \times B$ ,  
gdzie  $A = \langle 0, 1 \rangle, B = (1/2, 1)$
4.  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \times (0, \infty)$
5.  $\{(x, y) : x^2 = y^2\} \times \mathbb{R}$
6.  $\{(x, y, z) : x = y, z = y\}$

**Zadanie 4.** Inne zadania:

1. Niech  $A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$  oraz  $B = \{4n : n \in \mathbb{N}\}$ . Oblicz  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
2. Uzasadnij, że  $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$ .
3. Wskaż dwa niepuste zbiory skończonej mocy takie, że  $A \cap B = A \cup B$ .
4. Oblicz dopełnienie  $A'$  zbioru  $A = \{1, 2, 3\}$  w zbiorze  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
5. Niech  $A = \{11n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Oblicz  $A' := \mathbb{Z} \setminus A$ . Jakie jest przecięcie zbioru  $A'$  ze zbiorem liczb parzystych dodatnich?
6. Niech  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 5\}$ . Wyznacz zbiór  $A \times B$  i oblicz jego moc.
7. Udowodnij, że zachodzą równości  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ .
8. Ile elementów ma zbiór  $(A \times A) \setminus \{(a, a) : a \in A\}$  jeśli zbiór  $A$  ma 10 elementów?
- 9\*. Niech  $A_n = [1/n, 1 + 1/n]$ . Oblicz  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  oraz  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .
- 10\*. Uzasadnij, że  $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \cup B) \setminus (A \cap B))$ .

**Zadanie 5.** Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe.

1. 0,1(15)
2. 0,11(9)
3. 10,2(3)
4. 1,(5)
5. 0,00(7)
6. 1,1(33)
7. 0,(9)
8. 1,(0)

**Zadanie 6.** Zamień ułamek zwykły na dziesiętny.

1.  $\frac{3}{4}$
2.  $1\frac{2}{3}$
3.  $-\frac{22}{9}$
4.  $-\frac{5}{7}$
5.  $\frac{11}{100}$
6.  $\frac{12}{5}$

**Zadanie 7.** Oblicz.

1.  $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,25)^0}$
2.  $\frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}$
3.  $\left[ \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^{-2} \right]^{-3}$
4.  $\left[ \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3} \right]^{-2}$
5.  $\log_3 \sqrt[4]{27}$
6.  $\log_{\frac{1}{2}} (8 \cdot \sqrt[3]{16})$
7.  $\ln \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}$
8.  $\ln \sqrt{\frac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt{25\sqrt{3}}}}$
9.  $\ln e^2$

**Zadanie 8.** Znajdź  $x$ , jeśli wiesz, że:

1.  $\log_x 5 = \frac{1}{2}$
2.  $\log_x 8 = \frac{3}{4}$
3.  $\log_x \sqrt[4]{64} = 0,75$
4.  $\log_{16} x = -1,25$
5.  $\log_{32} x = -0,8$
6.  $4 \log_e x = 4e^3$

**Zadanie 9.** Oblicz. (Uwaga: jeśli przy logarytmie nie napisano podstawy, wówczas jest to logarytm dziesiętny, tzn.  $\log x = \log_{10} x$ .)

1.  $\log_{64} \log_{16} \log_4 16$
2.  $\log_3 \sqrt{3} + \log_2 0,5$
3.  $\log_4 (3 + \log_3 (1 + \log_2 4))$
4.  $\log \sqrt{20} + \log \sqrt{2} - 0,5 - \log 2$
5.  $\log \sqrt{18} - \log \sqrt{12} - \log \sqrt{6} + \log 2$

6.  $(\ln \ln e^e) : (\log_\pi \log_\pi \pi^{\pi^3})$

**Zadanie 10.** Uprość następujące wyrażenia.

1.  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{2x-2y} + 1$
2.  $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} + \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$
3.  $\frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$
4.  $\left( \frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2} \right) : \left( \frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{a^2-x^2} \right)$
5.  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}}}$