Kolokwium 2 - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 4
Niech $V = \{a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych. Znaleźć w przestrzeni dualnej $V^* = \{\phi : V \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ liniowe}\}$ bazę dualną C^* do bazy $C = \{1, (t-1), (t-1)^2\}$ w V. Bazą standardową w przestrzeni V jest baza $B = \{1, t, t^2\}$. Zapisać wektory bazy dualnej w bazie standardowej B.

Sprawdzenie, że zbiór C jest bazą V Wystarczy zauważyć, że przestrzeń liniowa V jest wymiaru 3 oraz

$$a \cdot 1 + b \cdot (t-1) + c \cdot (t-1)^2 = a - b + c + (b - 2c)t + ct^2.$$

Jeśli mamy dowolny wielomian $\alpha + \beta t + \gamma t^2 \in V$ to przyrównując współczynniki dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha = a - b + c \\ \beta = b - 2c \\ \gamma = c \end{cases}$$

Układ ten ma jedyne rozwiązanie

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \beta + 2\gamma \\ c = \gamma \end{cases}$$

Stąd wiemy, że wielomiany ze zbioru C rozpinają całą przestrzeń V. Ponadto powyższy układ równań daje nam też ich liniową niezależność (gdy $a + b(t-1) + c(t-1)^2 = 0$, to $\alpha = \beta = \gamma = 0$ i stąd $a = b = c = 0$).

Baza dualna Oznaczmy na potrzeby tego paragrafu wektory z bazy B przez $e_1 =$, $e_2 = t$ i $e_3 = t^2$. Z kolei dla bazy C: $f_1 = 1$, $f_2 = t - 1$ i $f_3 = (t-1)^2$.

Baza dualna do bazy C składa się z funkcji liniowych $\phi_i \in V^*$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$, które spełniają warunki

$$\phi_i(f_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Przykładowo funkcja ϕ_1 działa następująco

$$\phi_1(uf_1 + vf_2 + wf_3) = u.$$

Chcemy zapisać działanie tych funkcji w bazie standardowej B. Dla wektora ϕ_1 szukamy więc wyrażenia

$$\phi_1(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

Musimy zapisać zatem bazę B jako kombinacje liniowe wektorów z C. Mamy

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1, \\ e_2 &= f_1 + f_2, \\ e_3 &= f_1 + 2f_2 + f_3. \end{aligned}$$

Sprawdzenie powyższych równości jest bezpośrednie. Uzyskanie ich polega na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań, który tutaj pomijam (robiliśmy już podobne zadania przed poprzednim kolokwium).

Zapisujemy teraz

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 &= xf_1 + y(f_1 + f_2) + z(f_1 + 2f_2 + f_3) \\ &= (x + y + z)f_1 + (y + 2z)f_2 + zf_3 \end{aligned}$$

i dla funkcjonału ϕ_1 mamy

$$\phi_1(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \phi_1((x + y + z)f_1 + (y + 2z)f_2 + zf_3) = x + y + z,$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z faktu, że $\phi_1(f_1) = 1$ i $\phi_1(f_2) = 0$ oraz $\phi_1(f_3) = 0$. Analogiczne rozumowanie dla funkcjonałów ϕ_2 i ϕ_3 daje nam

$$\phi_2(xe_1 + ye_2 + ze_3) = y + 2z$$

oraz

$$\phi_3(xe_1 + ye_2 + ze_3) = z.$$

Zatem w bazie standardowej $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1, t, t^2\}$ dostaliśmy następującą postać bazy dualnej do bazy C

$$\begin{aligned} \phi_1(x + yt + zt^2) &= x + y + z, \\ \phi_2(x + yt + zt^2) &= y + 2z, \\ \phi_3(x + yt + zt^2) &= z. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli dla wielomianu f zdefiniujemy funkcję $\phi_{\lambda,k}(f) = \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$ i dowolnego naturalnego k (obliczamy k-tą pochodną w punkcie λ dzieląc wyrażenie przez k silnia) to dla przestrzeni liniowej

$$V_n = \{a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

i bazy $C = \{1, (t - \lambda), (t - \lambda)^2, \ldots, (t - \lambda)^n\}$ baza dualna $C^* = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ składa się z funkcji, które w bazie standardowej $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ mają postać

$$\phi_i(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = \phi_{\lambda,i}(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n).$$

Powyżej rozwiązane zadanie stanowiło przypadek szczególny tego ogólnego faktu dla $\lambda = 1$ i $n = 2$.