Kolokwium - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 4

Definiujemy ciąg liczbowy $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ taki, że

$$y_0 = 2, y_1 = 2$$

i dla $n \geq 2$ elementy zadajemy wzorem

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$$

Znaleźć funkcję $f(n)$, że $y_n = f(n)$.

Rozwiązanie Określamy wektor $v_n = (y_{n+1}, y_n)$ (pierwszy z tych wektorów $v_0 = (y_1, y_0)$). Zauważmy, że zachodzi relacja

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że startując od wektora v_0 dostajemy zależność

$$v_1 = Av_0$$

dla

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W podobny sposób $v_2 = A^2 v_0$, $v_3 = A^3 v_0$ i ogólnie

$$v_n = A^n v_0$$

Zatem musimy znaleźć zwarty wzór na n-tą potęgę macierzy A (podobnie jak w Zadaniu 3). Sprawdzamy czy macierz daje się zdiagonalizować. Mamy wielomian charakterystyczny macierzy A

$$f(x) = -1 - 2x + x^2$$

Szukamy rozwiązań równania $f(x) = 0$. Otrzymamy $x \in \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$. Możemy obliczyć odpowiadające tym wartościom własnym wektory własne. Dla $x = 1 + \sqrt{2}$ otrzymamy wektor $(1 + \sqrt{2}, 1)$. Dla $x = 1 - \sqrt{2}$ otrzymamy wektor własny $(1 - \sqrt{2}, 1)$. Podobnie jak w Zadaniu 3 wybieramy teraz bazę złożoną z wyżej podanych wektorów własnych i zapisując macierz przejścia z tej bazy do bazy standardowej

$$S = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

otrzymamy zależność

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Prawą stronę z łatwością podnosimy do potęgi n i dostaniemy ostatecznie

$$A^n = S \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Obliczamy teraz wzór na wektor v_n

$$v_n = A^n v_0 = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} S^{-1} v_0$$

Mnożąc kolejne składniki (najlepiej pomnożyć najpierw S^{-1} przez v_0 i później mnożyć przez kolejne składniki) otrzymamy ostatecznie

$$v_n = \begin{pmatrix} \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \\ \left(1-\sqrt{2}\right)^{n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

Stąd wiemy, że $y_n = \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n$.