Kolokwium - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 3
Dana jest macierz kwadratowa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Znaleźć postać macierzy A^n dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. **Rozwiązanie** Kluczowe do rozwiązania tego zadania jest przedstawienie macierzy A w takiej bazie, aby jej postać była najprostsza możliwa (najbliższa diagonalnej). Startujemy od obliczenia wielomianu charakterystycznego macierzy

$$f(x) = \det(M - Ix) = -(-1+x)^2(2+x).$$

Zatem mamy dwie wartości własne $x = 1$ i $x = -2$. Pokażemy teraz, że mimo tylko 2 wartości własnych, macierz jest diagonalizowalna (ma 3 liniowo niezależne wektory własne). Stosując standardową metodę (np. jak w Zadaniu 2) sprawdzamy odpowiednie przestrzenie rozwiązań układów równań.

$$A\mathbf{v} = x\mathbf{v}$$

gdzie $\mathbf{v} = (u, v, w)$ zapisany jako wektor kolumnowy. Dla $x = -2$ otrzymamy jednowymiarową przestrzeń rozwiązań generowaną przez wektor $(1, 1, 1)$.

Dla $x = 1$ dostaniemy dwa liniowo niezależne wektory własne $(-1, 0, 1)$ i $(-1, 1, 0)$. Sprawdzamy, że faktycznie wszystkie 3 wektory tworzą bazę (w szczególności, że są liniowo niezależne)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

Mając zadaną bazę $B = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ złożoną z wektorów własnych mamy postać macierzy A w bazie B

$$M_{BB}(A) = S^{-1}AS$$

gdzie S jest macierzą przejścia z bazy B do bazy standardowej $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, czyli

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ostatecznie dostajemy zależność

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

Teraz zauważmy, że mamy następującą elegancką własność

$$(S^{-1}AS)^2 = S^{-1}ASS^{-1}AS = S^{-1}AIAS = S^{-1}A^2S$$

i ogólnie (można to pokazać np. przez indukcję)

$$(S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS$$

Oczywiście, to co potrzebowaliśmy, to odwracalność macierzy S, czyli $SS^{-1} = I$, gdzie I jest macierzą identycznościową. W naszym przypadku stosując tę regułę dostaniemy wzór

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = S^{-1}A^nS$$

Szukamy wzoru na macierz A^n, więc musimy powyższą równość lewostronnie pomnożyć przez S i prawostronnie przez S^{-1}, otrzymując

$$S\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n S^{-1} = A^n$$

Zauważmy, że macierz diagonalna po lewej stronie szczególnie łatwo podnosi się do potęgi

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skoro wiemy jaką postać ma macierz S, to po rachunkach otrzymamy

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2+(-2)^n) & \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) & \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) & \frac{1}{3}(2+(-2)^n) & \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) \\ \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) & \frac{1}{3}(-1+(-2)^n) & \frac{1}{3}(2+(-2)^n) \end{pmatrix}$$

Można teraz wstawiając dowolną wartość n otrzymać szybko postać macierzy A^n (o ile oczywiście szybko potrafimy obliczyć liczbę 2^n).