Kolokwium 2 - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 2
Znaleźć rzut prostopadły wektora $(1,0,0)$ na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\{(1,2,3),(2,3,4)\}$. Zadanie wydaje się skromne, ale zrobimy je na dwa sposoby. Jeden będzie okropny i wymaga robienia pełnej ortogonalizacji (to co pokazywałem na ćwiczeniach). Drugi jest prosty, ładny i szybki (tego nie zdążyłem pokazać do końca na ćwiczeniach - oto prezentuję resztę).

Uwagi ogólne Obie metody powyżej przenoszą się bezpośrednio na dowolny wymiar przestrzeni i zawsze działają dobrze z jednym wektorem.

Przez cały poniższy wywód iloczyn skalarny definiujemy następująco

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Norma wektora $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Metoda z wykorzystaniem ortogonalizacji Dany jest wektor $v_1 = (1,2,3)$. Musimy unormować wektor dostając

$$w_1 = \frac{1}{||v_1||}v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

Teraz znajdujemy drugi wektor startując od wektora v_2:

$$u = v_2 - (\langle w_1, v_2\rangle)w_1,$$

$$w_2 = \frac{1}{||u||}u.$$

Sprawdzamy, że oba wektory są ortogonalne

$$\langle w_1, w_2\rangle = \langle \frac{1}{||v_1||}v_1, \frac{1}{||u||}u\rangle$$

$$= \frac{1}{||v_1||}\cdot\frac{1}{||u||}\langle v_1, v_2 - (\langle w_1,v_2\rangle)w_1\rangle$$

$$= (\frac{1}{||v_1||}\cdot\frac{1}{||u||})(\langle v_1,v_2\rangle - (\langle w_1,v_2\rangle)\langle v_1,w_1\rangle)$$

$$= (\frac{1}{||v_1||}\cdot\frac{1}{||u||})(\langle v_1,v_2\rangle - (\langle v_1,v_2\rangle)\frac{\langle v_1,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}) = 0.$$

Ponadto mamy tak jak było potrzebne $||w_1|| = 1$ i $||w_2|| = 1$. Teraz wybieramy dowolny wektor, który nie należy do podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ rozpiętej przez wektory w_1, w_2 (z samego procesu ortogonalizacji wiemy, że pozostają one liniowo niezależne o ile na wejściu dostaliśmy wektory liniowo niezależne). Mamy

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right),$$

$$w_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}} \right).$$

Zauważmy, że cały czas mamy daną tę samą podprzestrzeń co na początku

$$U = lin(\{v_1, v_2\}) = lin(\{w_1, w_2\}).$$

Wystarczy w takim razie znaleźć po prostu wektor liniowo niezależny od wektorów v_1 i v_2,np. $e = (0, 0, 1)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

co dowodzi liniowej niezależności wektorów. Uzupełniamy teraz bazę naszych wektorów ortonormalnych $\{w_1, w_2\}$ do bazy $\mathbb{R}^3$ za pomocą wektora e. Mamy

$$e' = e - \langle w_1, e \rangle w_1 - \langle w_2, e \rangle w_2$$

$$w_3 = \frac{1}{||e'||} e'.$$

Wektor w_3 jest ortogonalny do wektorów w_1 i w_2 (proszę to rozpisać bez znajdowania współrzędnych !) oraz spełnia $||w_3|| = 1$. Ma postać

$$w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Mając współrzędne można jeszcze raz sprawdzić, że

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = 0.$$

Wektory $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zatem nasz wektor $(1, 0, 0)$ zapisuje się jako

$$(1, 0, 0) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3.$$

Chcemy znaleźć rzut prostopadły tego wektora na podprzestrzeń U, czyli szukamy takiego wektora $r \in U$, że

$$\langle (1,0,0) - r, r \rangle = 0. \ (*)$$

Weźmy zatem

$$r = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2.$$

Sprawdzimy czy tak zadany r spełnia powyższy warunek $(*)$.

$$\begin{aligned}
\langle (1,0,0) - r, r \rangle &= \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\
&= \langle \alpha_3 w_3, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\
&= \langle \alpha_3 w_3, \alpha_1 w_1 \rangle + \langle \alpha_3 w_3, \alpha_2 w_2 \rangle \\
&= \alpha_3 \alpha_1 \langle w_3, w_1 \rangle + \alpha_3 \alpha_2 \langle w_3, w_2 \rangle \\
&= \alpha_3 \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \alpha_2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Pozostaje nam obliczenie współczynników α_1 i α_2. Zauważmy, że w całej metodzie w ogóle nie potrzebowaliśmy współczynnika α_3 ani dokładnej postaci wektora w_3 (tutaj policzyłem tylko, aby zwiększyć pedagogiczną wartość tego objaśnienia..). To bardzo ważne, bo oznacza, że w czasie liczenia na kolokwium wystarczy tylko znaleźć bazę ortogonalną tej przestrzeni, na którą rzutujemy, czyli wektory w_1 i w_2 i pamiętać, że zawsze można to uzupełnić do bazy całej przestrzeni (co gwarantuje nam rozwiązalność zadania !). Współczynniki obliczamy następująco

$$\langle (1,0,0), w_1 \rangle = \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3, w_1 \rangle = \alpha_1$$

czyli w naszym przypadku

$$\alpha_1 = \langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \rangle.$$

Podobnie otrzymamy

$$\langle (1,0,0), w_2 \rangle = \alpha_2$$

$$\alpha_2 = \langle (1,0,0), \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}} \right) \rangle$$

i ostatecznie

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

oraz

$$\alpha_2 = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Zatem nasz wektor r rzutu prostopadłego wektora $(1,0,0)$ na podprzestrzeń U (zauważmy, że geometrycznie jest to po prostu płaszczyzna Π o równaniu $x-2y+z=0$) ma współrzędne

$$r = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

i w sensie geometrycznym jest to wektor z płaszczyzny Π, który leży najbliższej w sensie odległości zadanej przez nasz iloczyn skalarny (czyli w tym przypadku odległości euklidesowej) do wektora $(1,0,0)$. Inaczej, długość

$$||(1,0,0) - r||$$

jest najmniejsza możliwa.

Druga metoda - prostsza obliczeniowo Tworzymy z naszych wektorów v_1 i v_2 macierz kolumn

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jeśli obie kolumny są liniowo niezależne, to macierz $A^T A$ będzie odwracalna

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{pmatrix}.$$

Dlaczego tak jest ? Otóż wystarczy pokazać, że $A^T A v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Av = 0$ i zachodzi to dla dowolnego wektora v (w naszym przypadku o dwóch współrzędnych). Z jednej strony jeśli $Av = 0$, to mnożąc lewostronnie przez macierz A^T otrzymujemy $A^T A v = 0$ (zwracam uwagę na mylący zapis, gdzie 0 oznacza wektor zerowy !). Z drugiej strony, gdyby $A^T A v = 0$, to mnożąc z lewej strony przez transpozycję wektora v mamy

$$v^T A^T A v = 0$$

$$(Av)^T (Av) = 0,$$

ale lewa strona to po prostu iloczyn skalarny $\langle Av, Av \rangle = (Av)^T (Av)$. Korzystając z faktu, że suma kwadratów liczb rzeczywistych jest równa zero dokładnie wtedy, gdy wszystkie liczby są równe zero mamy oczywiście dla dowolnego wektora u, że $\langle u, u \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$ (wektor zerowy). Zatem w naszym przypadku wynika z tego, że $Av = 0$!

Teraz po prostu konstruujemy odpowiednią macierz

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

W naszym przypadku mamy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{29}{6} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Dlaczego taka dziwna macierz ? Łatwo sprawdzić, że jeśli mamy wektor v, który chcemy zrzutować na podprzestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy A, to wektor

$$b = Pv$$

jest poszukiwanym rzutem. Uzasadnienie: musimy sprawdzić, że wektor $v-b$ jest ortogonalny do wektora b oraz, że b jest kombinacją liniową kolumn z macierzy A. Zauważmy, że

$$P^2 = PP = (A(A^TA)^{-1}A^T)(A(A^TA)^{-1}A^T)$$

$$= A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P.$$

Taki warunek oznacza, że macierz P nazywamy projekcją. Dodatkowo

$$P^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = (A^T)^T(((A^TA)^{-1})^T)A^T = A(((A^TA)^T)^{-1})A^T$$

$$= A(A^TA)^{-1}A^T = P,$$

czyli macierz P jest dodatkowo symetryczna. Skorzystaliśmy tu z prostego faktu, że branie transpozycji jest przemienne z odwracaniem macierzy $((X)^T)^{-1} = (X^{-1})^T$. Ponadto zauważmy, że

$$Pv = A(((A^TA)^{-1}A^T)v) = Aw = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

wiec obraz dowolnego wektora v przez P jest kombinacją liniową kolumn z A.

Teraz możemy pokazać, że rzut Pv wektora v jest prostopadły do $v - Pv$ (czyli, że dostaniemy to co w poprzedniej metodzie, tylko mniejszym wysiłkiem obliczeniowym). Traktujemy wektor v jako wektor kolumnowy i iloczyn skalarny $\langle a, b\rangle = a^Tb$ (uwaga na poczatku zadania!).

$$\langle v - Pv, Pv\rangle = (v - Pv)^Tv = (v^T - (Pv)^T)Pv = v^TPv - (v^TP^TPv)$$

$$= v^TPv - v^T(PP)v = v^TPv - v^TPv = 0.$$

Skorzystaliśmy z wyprowadzonej powyżej własności $P^T = P$ oraz $P^2 = PP = P$ oraz prostą własność dla macierzy $(X + Y)^T = X^T + Y^T$.

W naszym zadaniu zatem wystarczy teraz pomnożyć macierz P przez wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Pv = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Jak widać, wynik zgadza się z poprzednią metodą, chociaż tutaj wykorzystaliśmy tylko mnożenie czterech macierzy i policzenie jednej odwrotności !