Kolokwium - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 2
Dana jest macierz zależna od dwóch parametrów $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Obliczyć jej wielomian charakterystyczny oraz wskazać wartości własne i wektory własne. Udowodnić, że macierz jest zawsze diagonalizowalna oraz znaleźć jej postać diagonalną.

Rozwiazanie Oznaczmy na potrzeby zadania naszą macierz przez $A(a, b)$. Obliczamy najpierw wielomian charakterystyczny

$$f(x) = \det(A(a, b) - Ix) = -(2a - x)(b - x)x$$

Rozwiązania równania

$$f(x) = 0$$

są wartościami własnymi zadanej macierzy, czyli są to liczby

$$x \in \{0, b, 2a\}$$

Zauważmy, że jeśli $a = b = 0$, to mamy dokładnie jedną wartość własną. Podobnie, gdy $a = \frac{1}{2}$ i $b = 1$, to mamy tylko dwie różne wartości własne. Ogólnie, gdy $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i $a \neq 2b$, to mamy trzy różne wartości własne.

W szczególności jeśli zachodzi przypadek, że mamy trzy różne wartości własne, to ponieważ każdej wartości własnej odpowiada co najmniej jeden wektor własnych (i dla parami różnych wartości własnych wektory takie są liniowo niezależne), to w tym przypadku (nawet bez liczenia wektorów własnych) możemy stwierdzić, że macierz jest diagonalizowalna, tj. istnieje taka macierz przejścia z bazy do bazy S, że

$$S^{-1}A(a, b)S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

Oczywiście ustawiając w innej kolejności wektory bazowe, możemy dostać dowolną ustawienie elementów na przekątnej (oczywiście z inną macierzą przejścia S').

UWAGA W przypadku, gdy mamy mniej wartosci własnych niż wynosi wymiar macierzy, wówczas bez obliczania wektorów własnych nie możemy stwierdzić czy macierz będzie diagonalizowalna czy nie.

Obliczanie wektorów własnych odbywa się zgodnie z regułą:

$$A(a,b)r = xr$$

gdzie r jest szukanym wektorem własnym i x jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$ podanego powyżej.

Oczywiście, otrzymujemy równoważną zależność

$$(A(a,b) - Ix)r = 0$$

gdzie 0 oznacza wektor zerowy $(0,0,0)$ zapisany jako kolumna. Niech w takim razie $r = (u,v,w)$. Obliczymy wszystkie liniowo niezależne wektory własne.

Przypadek I $x = 0$.

Wówczas musimy rozwiązać równanie

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Równoważnie otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} au + aw = 0 \\ bv = 0 \\ au + aw = 0 \end{cases}$$

Jeśli $b \neq 0$, to $v = 0$ i jeśli $a \neq 0$, to $u = -w$, czyli otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dla dowolnego $w \neq 0$. Zatem przestrzeń rozwiązań tego układu równań jest jednowymiarowa i generowana przez wektor $(-1,0,1)$, który jest wektorem własnym dla wartości własnej 0.

Jeśli $b = 0$ i $a \neq 0$, to wówczas dostajemy dwuwymiarową przestrzeń rozwiązań

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

czyli oznacza to, że mamy dwa liniowo niezależne wektory własne, które odpowiadają wartości własnej zero (przypominam, że $b = 0$!), a dokładnie

$$(-1,0,1), (0,1,0)$$

Jeśli $b \neq 0$ i $a = 0$, to z układu równań odczytujemy, że $v = 0$ i u, w są dowolne, czyli ponownie mamy dwuwymiarową przestrzeń rozwiązań

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generowaną przez dwa liniowo niezależne wektory $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$ (będące wektorami własnymi dla wartości własnej 0).

Jeśli zachodzi przypadek $a = 0$ i $b = 0$, to macierz $A(a, b)$ jest wówczas macierzą zerową i wektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$ tworzą liniowo niezależny układ i są wektorami własnymi dla wartości własnej 0.

Przypadek II x= 2a

Wówczas musimy obliczyć rozwiązania układu

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & b-2a & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analizowaliśmy już sytuację, gdy $a = 0$, więc możemy założyć teraz, że $a \neq 0$.

Wówczas otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} aw - au = 0 \\ (b-2a)v = 0 \\ au - aw = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego i ostatniego równania otrzymamy, że $u = w$. Drugie równanie możemy podzielić przez $(b - 2a)$ o ile $b \neq 2a$. Ten przypadek daje nam, że $v = 0$, czyli jako przestrzeń rozwiązań otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem wektorem własnym dla wartości własnej $2a$ jest wektor $(1, 0, 1)$.

W przypadku, gdy $b = 2a$, dostajemy, że v jest dowolne i przestrzeń rozwiązań zwiększa wymiar o jeden, czyli

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zatem w tym przypadku dla wartości własnej $2a$ (równej również b) dostajemy dwa liniowo niezależne wektory własne $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, 0)$.

Przypadek III x=b

Szukamy rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Równoważnie

$$\begin{cases} (a-b)u + aw = 0 \\ 0 = 0 \\ au + (a-b)w = 0 \end{cases}$$

Zakładamy, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i $b \neq 2a$ (wszystkie te przypadki były już analizowane). Wówczas dodając stronami równanie pierwsze i trzecie dostajemy, że

$$(2a-b)(u+w) = 0$$

i korzystając z założenia $2a \neq b$, dostajemy $u = -w$. Wstawiając do trzeciego równania otrzymujemu

$$bu = 0$$

Ale z założenia $b \neq 0$, więc $u = 0$ i wtedy również $w = 0$. Zauważmy, że v jest dowolne (nie występuje w żadnym z równań). Stąd przestrzeń rozwiązań ma postać

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i wartości własnej b odpowiada jeden wektor własny $(0,1,0)$ (również jego wielokrotności, ale tych oczywiście nie bierzemy pod uwage - szukaliśmy tylko wektorów liniowo niezależnych).

Zauważmy teraz, że z całej powyższej analizy, niezależnie od założeń na a i b możemy stwierdzić, że

1. wartości własnej 0 na pewno odpowiada wektor własny $(-1,0,1)$.
2. wartości własnej $2a$ na pewno odpowiada wektor własny $(1,0,1)$.
3. wartości własnej b na pewno odpowiada wektor własny $(0,1,0)$.

Zauważmy, że wektory $(-1,0,1)$, $(1,0,1)$ i $(0,1,0)$ są liniowo niezależne

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

i do tego rozpinają całą przestrzeń liniową $\mathbb{R}^3$. Zatem zbiór

$$B = \{(-1,0,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$$

jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ i macierz $A(a,b)$ zapisana względem tej bazy ma postać

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Użyliśmy tutaj macierzy przejścia S

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

od bazy B do bazy E i zapisaliśmy macierz $M_{BB}(A(a,b))$ za pomocą formuły

$$M_{BB}(A(a,b)) = S^{-1}A(a,b)S$$

otrzymując ostatecznie, że macierz $A(a,b)$ zapisana w bazie składającej się z wektorów własnych B ma postać diagonalną

$$M_{BB}(A(a,b)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$