Kolokwium 2 - przykłady, *Bartosz Naskręcki*
Zadanie 1
Dana jest forma dwuliniowa $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f((x,y,z),(u,v,w)) = ux + wx + vy + wy + uz + vz + 3wz.$$

Znaleźć macierz tej formy oraz sprawdzić, że jest symetryczna, a także znaleźć stowarzyszoną z nią formę kwadratową. Sprowadzić znalezioną formę do postaci kanonicznej metodą uzupełnienia do pełnego kwadratu oraz metodą Jacobiego, a także metodą wykorzystującą ortogonalizację Grama-Schmidta.

Macierz formy Wyznaczamy macierz formy w bazie standardowej $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Macierz ta jest zadana wzorem

$$M = (a_{ij}),$$

gdzie $a_{i,j} = f(e_i, e_j)$ (zwracam uwagę, że i jest numerem wiersza, natomiast j kolumny). Obliczamy

$$M = \begin{pmatrix} f((1,0,0),(1,0,0)) & f((1,0,0),(0,1,0)) & f((1,0,0),(0,0,1)) \\ f((0,1,0),(1,0,0)) & f((0,1,0),(0,1,0)) & f((0,1,0),(0,0,1)) \\ f((0,0,1),(1,0,0)) & f((0,0,1),(0,1,0)) & f((0,0,1),(0,0,1)) \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście można dokonać sprawdzenia czy poprawnie wykonaliśmy obliczenia sprawdzając równość

$$(x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = f((x,y,z),(u,v,w)).$$

Forma dwuliniowa jest symetryczna Tutaj sprawdzenie nie jest specjalnie skomplikowane. Wystarczy policzyć wyrażenie

$$f((u,v,w),(x,y,z))$$

i przyrównać je do $f((x,y,z),(u,v,w))$.

Można również zauważyć, że macierz M jest symetryczn, tj. $M = M^T$, wiec skoro

$$f(a,b) = aMb^T$$

dla wektorów $a = (x, y, z)$ i $b = (u, v, w)$. Transponując stronami

$$f(a, b)^T = (aMb^T)^T.$$

Transpozycja liczby $f(a, b)$ to po prostu ona sama (utożsamiamy liczbę z macierzą o wymiarach 1 na 1). Przy mnożeniu macierzy transpozycja zmienia kolejność mnożenia: $(XY)^T = Y^T X^T$. Zatem

$$f(a, b) = (b^T)^T M^T a^T.$$

Dwukrotne transponowanie macierzy przywraca ją do postaci początkowej $((X)^T)^T$, czyli

$$f(a, b) = bM^T a^T.$$

Korzystamy teraz z faktu, że $M = M^T$ i

$$f(a, b) = bMa^T.$$

Ale prawa strona równości to

$$f(b, a) = bMa^T.$$

Łącząc obie równości dostajemy, że odwzorowanie f jest symetryczne

$$f(a, b) = f(b, a).$$

Stowarzyszona forma kwadratowa Skoro wiemy już, że odwzorowanie f jest dwuliniowe i symetryczne, to możemy zdefiniować dla niego formę kwadratową określoną wzorem

$$q(a) = aMa^T$$

dla $a = (x, y, z)$.

UWAGA Jeśli macierz M nie byłaby symetryczna, to dla wyrażenia $q(a) = aMa^T$ zawsze można znaleźć nową macierz $B = \frac{1}{2}(M + M^T)$, która jest symetryczna i spełnia $q(a) = aBa^T$.

W naszym zadaniu forma przybiera postać

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 3z^2.$$

Sprowadzenie do postaci kanonicznej metodą uzupełniania do pełnego kwadratu Uzupełniamy najpierw ze względu na zmienną x

$$x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 3z^2 = (x^2 + 2xz) + 2yz + y^2 + 3z^2,$$

$$(x^2 + 2xz) + 2yz + y^2 + 3z^2 = (x+z)^2 - z^2 + 2yz + y^2 + 3z^2.$$

Teraz uzupełniamy ze względu na zmienną y (wszystkie wyrażenia z x powinny być już tylko zawarte w jednym składniku sumy.

$$(x+z)^2 - z^2 + y^2 + 3z^2 = (x+z)^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$$

$$(x+z)^2 + y^2 + 2yz + 2z^2 = (x+z)^2 + (y+z)^2 - z^2 + 2z^2$$

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 - z^2 + 2z^2 = (x+z)^2 + (y+z)^2 + z^2$$

Zatem dostajemy równość

$$q(x,y,z) = (x+z)^2 + (y+z)^2 + 2z^2$$

Dokonujemy zamiany zmiennych $x' = x+z$, $y' = y+z$ oraz $z' = z$. Zamiana dana jest relacją macierzową

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Definiując nową funkcję $q'(x',y',z') = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$ mamy związek

$$q'(x',y',z') = q(x,y,z)$$

czyli forma kwadratowa q' wyznacza nam formę kanoniczną dla formy q (zadanej w bazie standardowej $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$) w nowej bazie $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(-1,-1,1)\}$. Macierz przejścia z bazy B do bazy B' zadana jest macierzą odwrotną do macierzy powyżej, tzn.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Istotnie $q(x'(1,0,0) + y'(0,1,0) + z'(-1,-1,1)) = q(x'-z', y'-z', z') = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = q'(x',y',z')$.

Metoda Jacobiego W metodzie Jacobiego w przeciwieństwie do wyżej podanej metody Lagrange'a nie znajdziemy macierz przejścia P od jednej bazy formy do drugiej. Za to obliczenia będą nieco krótsze i od razu otrzymamy postać kanoniczną. Poza tym metodę tę możemy zastosować tylko, gdy minory macierzy M nie będą się zerowały (w praktyce numerycznej zazwyczaj tak będzie, ale w rozważaniach teoretycznych często wiemy, że macierz M ma np. wyznacznik równy zero !).

Macierz formy kwadratowej $q(x, y, z)$ jest postaci

$$M = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy kolejne minory

$$\Delta_0 = 1$$

(ten z definicji przyjmuje taką wartość);

$$\Delta_1 = \det(a_{11}) = \det(1) = 1$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Zatem istnieją nowe zmienne (x', y', z') i macierz przejścia P od bazy standardowej do pewnej nowej bazy taka, że

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

oraz nasza forma kwadratowa $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 3z^2$ przyjmuje nową postać

$$q(x, y, z) = q'(x', y', z') = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(z')^2 = (x')^2 + (y'1)^2 + (z')^2.$$

Metod z wykorzystaniem ortogonalizacji Teraz podamy ostatnią z metod, którą można zastosować, aby sprowadzić formę kwadratową do postaci kanonicznej. Kluczowe dla tej metody jest twierdzenie, ze każda macierz symetryczna o współczynnikach rzeczywistych posiada bazę złożoną z wektorów własnych. Co więcej, wszystkie wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Ponadto jeśli dwa wektory własne v_1 i v_2 są stowarzyszone z dwoma różnymi wartościami własnymi, tzn. $Mv_1 = \lambda_1 v_1$ i $Mv_2 = \lambda_2 v_2$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wówczas dla zwykłego iloczynu skalarnego $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n$ zachodzi relacja

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

czyli wektory v_1 i v_2 są ortogonalne. Dla każdej podprzestrzeni liniowej wektorów

$$V_\lambda = \{v \in V : Mv = \lambda v\}$$

mamy dla macierzy symetrycznej M bazę złożoną z wektorów własnych. Dla każdego λ - wartości własnej szukamy bazy ortonormalnej takiej przestrzeni. Wówczas zapisując wektory takich baz dla wszystkich wartości własnych otrzymamy macierz P (jej kolumny będą ustawionymi kolejno wektorami ortonormalnymi), która jest ortogonalna, tzn.

$$PP^T = P^T P = I,$$

gdzie I jest macierzą identycznościową.

W naszym przypadku macierz M ma wielomian charakterystyczny

$$g(x) = \det(M - Ix) = 1 - 5x + 5x^2 - x^3 = -(-1 + x)(1 - 4x + x^2)$$
$$= (1 - x)(x - (2 - \sqrt{3}))(x - (2 + \sqrt{3})).$$

Obliczamy kolejno

$$V_1 = \{\alpha(-1, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$V_{2+\sqrt{3}} = \{\alpha\left(\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\right), 1\right) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$V_{2-\sqrt{3}} = \{\alpha\left(\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right), 1\right) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

W naszej sytuacji mamy zatem 3 wektory własne i każda z przestrzeni własnych jest jednowymiarowa. W takim wypadku ortogonalizacja (czy raczej ortonormalizacja) polega tylko na unormowaniu podanych wektorów).

W efekcie uzyskujemy 3 ortogonalne i unormowane wektory własne

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$
$$v_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}, \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}, \sqrt{\frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)}\right)$$
$$v_3 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}, -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{3}}}\right)$$

Możemy obliczyć bezpośrednio, że

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

i podobnie dla pozostałych dwóch par wektorów oraz, że $||v_i|| = 1$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Tworzymy teraz macierz P następująco

$$P = [v_1 \mid v_2 \mid v_3].$$

UWAGA: zakładamy, że wektory v_i zapisane powyżej jako wiersze w macierzy P traktujemy jako kolumny !. Zachodzi dla niej oczywiście własność

$$P^T P = P P^T = I$$

ze względu na ortogonalność wektorów oraz ich unormowanie. Ponadto mamy też

$$\begin{aligned} Mv_1 &= 1v_1, \\ Mv_2 &= (2+\sqrt{3})v_2, \\ Mv_3 &= (2-\sqrt{3})v_3. \end{aligned}$$

Zatem iloczyn macierzy

$$P^T M P = P^T[Mv_1 \mid Mv_2 \mid Mv_3] = P^T[\lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \lambda_3 v_3],$$

gdzie $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = (2+\sqrt{3})$ i $\lambda_3 = (2-\sqrt{3})$. Mamy $v_i^T(\lambda_j v_j) = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$ oraz

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Zatem możemy dokończyć wymnażanie macierzy

$$P^T[\lambda_1 v_1 \mid \lambda_2 v_2 \mid \lambda_3 v_3] = (\lambda_j \langle v_i, v_j \rangle_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Teraz skoro nasza forma kwadratowa jest postaci

$$q(x, y, z) = (x, y, z) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

to piszemy zamiane zmiennych

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wstawiając do wzoru na formę kwadratową otrzymamy

$$q(x,y,z) = (x',y',z')P^T M P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

i korzystając z obliczeń powyżej

$$q(x,y,z) = (x',y',z') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Mamy wzór

$$q(x,y,z) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2,$$
$$q(x,y,z) = (x')^2 + (2+\sqrt{3})(y')^2 + (2-\sqrt{3})(z')^2.$$

wraz z odpowiednią macierzą przejścia (a dokładniej jest to macierz przejścia od standardowej do bazy $\{v_1, v_2, v_3\}$). Zauważmy na koniec, że postać ta jest różna niż w poprzednich dwóch metodach, ale łatwo jest zauważyć, że skoro

$$2 > \sqrt{3},$$

to wszystkie wartości własne są dodatnie i można wyciągnąć z nich pierwiastek rzeczywisty, więc mamy po drugiej zamianie zmiennych $x'' = x'$, $y'' = \sqrt{2+\sqrt{3}}x'$, $z'' = \sqrt{2-\sqrt{3}}z'$ postać taką jak w poprzednich wersjach

$$q(x,y,z) = (x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2.$$