Ćwiczenia 2 - zadania dodatkowe *Bartosz Naskręcki*

Zadania

1. Uzasadnij, że każda grupa mająca p elementów (p – liczba pierwsza) jest cykliczna.

2. Jaka jest najmniejsza grupa G zawarta w S_4 – grupie permutacji na czterech symbolach, zawierająca elementy (1 234) oraz (12). Oblicz jej rząd.

3. Które z następujących podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ są podgrupami $(\mathbb{R}, +)$?
   - $\mathbb{Z}$
   - $\{n\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}\}$
   - $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

4. Dla dowolnych dwóch elementów a, b w grupie G spełniona jest relacja $a^2b^2 = (ab)^2$. Uzasadnij, że grupa G jest abelowa.

5. (*) Niech $a(p)$ będzie długością okresu w rozwinięciu dziesiętnym liczby $1/p$ dla liczby pierwszej p różnej od 2 i 5. Uzasadnij, że
   - $10^{a(p)} \equiv 1 \pmod p$,
   - $n \geqslant 1$ i $10^n \equiv 1 \pmod p$, to $a(p) \mid n$,
   - $a(p) \leqslant p - 1$; ponadto $a(p) = p - 1$ dokładnie wtedy, gdy element 10 jest generatorem grupy $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$.

   Oblicz długości okresów dla $p \in \{7, 11, 13\}$.

6. Na zbiorze $G = \{e, a, b, c, d, e\}$ mamy określone działanie $\circ$ takie, że e jest jego elementem neutralnym i dana jest tabelka mnożenia

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	a	e	c
c	c	b	d	a	e
d	d	c	e	b	a

   Wykaż, że zbiór $\{e, a\}$ jest grupą z dzianiem $\circ$. Uzasadnij bez wykonywania obliczeń na podstawie poprzedniego zdania i twierdzenia Lagrange'a, że zbiór $(G, \circ)$ nie jest grupą.

7. Zbiór macierzy
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\} \tag{1}$$
   z mnożeniem macierzy ma strukturę grupy 27-elementowej. Uzasadnij to stwierdzenie. Ponadto udowodnij, że wszystkie elementy w tej grupie mają rząd równy 3.

8. (*) Dla grupy z poprzedniego zadania znajdź największą podgrupę przemienną.

9. (*) Z pomocą grupy (1) podaj przykład dwóch nieizomorficznych grup skończonych, które spełniają warunek: *dla każdego t liczba elementów rzędu t jest identyczna w obu grupach.*