

## Ćwiczenia 2 - zadania *Bartosz Naskręcki*

### Zadania

1. Wyznacz tabelkę mnożenia dla grupy symetrii sześciokąta foremnego.
2. Opisz grupę przekształceń generowaną przez funkcje  $f_1(x) = 1/x$  oraz  $f_2(x) = x + 1$ . Wyznacz rzędy elementów i tabelkę mnożenia.
3. Sprawdź czy zbiór  $\mathbb{R}$  wraz z działaniem  $a \circ b = ab + a - 1$  ma strukturę grupy.
4. Sprawdź łączność działania  $\circ$  na zbiorze  $M$  jeśli
  - $M = \mathbb{Z}$ ,  $x \circ y = x - y$
  - $M = \mathbb{N}$ ,  $x \circ y = NWD(x, y)$
5. W grupie  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$  reszt modulo 20 znaleźć wszystkie elementy rzędu 4 i rzędu 5.
6. Znaleźć wszystkie grupe trzejelementowe (z dokładnością do izomorfizmu).
7. Sprawdzić, że grupa  $(G, \circ)$  spełniająca warunek  $b \circ a = b^2 \circ a \circ b^{-1}$  jest przemienna.
8. Sprawdzić, że zbiór  $F$  funkcji  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  wraz z dodawaniem  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$  oraz mnożeniem  $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$  ma strukturę pierścienia przemiennego z jedynką. Znajdź przykłady dzielników zera.
9. W grupie  $(\mathbb{Q}[x], +)$  wielomianów z dodawaniem wprowadzamy dodatkową operację  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . Czy struktura  $(\mathbb{Q}[x], +, \circ)$  jest pierścieniem?
10. Zbiór  $G = \{e, a, b, c\}$  ma być grupą czteroelementową wraz z działaniem  $\circ$  określonym tabelką. Uzupełnij tabelkę mnożenia oraz wskaż rzędy wszystkich elementów.

$\circ$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$		
$b$	$b$		$e$	
$c$	$c$			

Czy można to zrobić na więcej niż jeden sposób? Ile jest grup czteroelementowych (z dokładnością do izomorfizmu)?

11. Wskaż liczbę elementów najmniejszej grupy skończonej, która posiada jednocześnie elementy rzędów 2, 3,  $3^3$  oraz 6. Czy istnieje przykład takiej grupy wśród grup cyklicznych?