

## Ćwiczenia 1 - zadania uzupełniające *Bartosz Naskręcki*

### Zadania

1. Pokazać, że  $1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 1(n \text{ jedynek}) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Udowodnić, że dla  $n \geq 2$  jeśli  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$  dla  $x_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), to  $x_1 + \dots + x_n \geq n$ .
3. Na płaszczyźnie poprowadzono  $n$  prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznaczyć liczbę części, na które te  $n$  prostych dzieli płaszczyznę.
4. Połączono  $n$  punktów strzałkami w taki sposób, że każda para różnych punktów jest połączona strzałką. Udowodnić, że istnieje 'centrum', czyli punkt, z którego można dojść do każdego innego w co najwyżej dwóch krokach, idąc zgodnie z kierunkiem strzałek.
5. Niech  $F_{-1} = 1, F_0 = 0$  i dla  $n \geq 1$   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Pokazać, że  $\sum_{i=-1}^k F_i = F_{k+2}$  dla dowolnego  $k \geq -1$  całkowitego.
6. Udowodnić tożsamość  $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$ .
7. Sprawdzić, że  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$  dla  $n \geq -1$ .
- 8\*. **Twierdzenie Zeckendorfa:**  
Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można w jednoznaczny sposób zapisać jako sumę odpowiednich liczb  $F_i$  dla pewnych  $i$ .
9. Uzasadnij (przybliżoną) metodę przeliczania mil na kilometry:

$$\begin{aligned} 50[mil] &= 34 + 13 + 3 = \\ &= 55 + 21 + 5 = 81[kilometry]. \end{aligned}$$