

Ćwiczenia 1 - zadania, Bartosz Naskręcki

Twierdzenie 1 (Zasada indukcji matematycznej). Niech $T(n)$ oznacza pewną tezę o liczbie naturalnej n . Jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n_0

- (i) teza $T(n_0)$ jest prawdziwa,
- (ii) dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ z prawdziwości tezy $T(n)$ wynika prawdziwość $T(n+1)$, to teza $T(n)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

1 Zadania

- 1 Pokazać, że $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Pokazać, że $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
- 3 Dla dowolnego $n \geq 5$ naturalnego $2^n > n^2$.
- 4 Pokazać, że $10^n + 4^n - 2$ jest podzielne przez 3 dla dowolnego n naturalnego.
- 5 Udowodnić, że $2|n(n+1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
- 6 Jeśli $2|(2n+1)$ to $2|(2(2n+1)+1)$. Czy można zastosować zasadę indukcji, aby udowodnić, że każda liczba nieparzysta $2n+1$ jest podzielna przez 2? Wskaż błąd rozumowania.
- 7 Udowodnić, że dla $n \geq 2$ naturalnych $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$.
- 8 Pokazać, że $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2$ dla dowolnej liczby zagnieżdżeń.
- 9 Pokazać, że wielomian $x^n - y^n$ dzieli się bez reszty przez wielomian $x - y$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że $5|(6^n - 1)$ dla n naturalnych.
- 10 "Wszyscy studenci na sali są kobietami".
Niewątpliwie na sali siedzi jedna kobieta.
Pokażemy, że jeśli dowolny zbiór n studentów składa się z kobiet, to dowolny zbiór $n+1$ studentów składa się z kobiet. Niech dany będzie zbiór S $n+1$ studentów. Wybieramy w nim jednego studenta wyróżnionego s i całą resztę U : $S = \{s\} \cup U$. Zbiór U ma n elementów zatem składa się z samych kobiet. Być może s nie jest kobietą, ale biorąc inny podział zbioru S taki, że $S = \{s'\} \cup U'$ i U' zawiera s widzimy, że skoro U' ma n elementów, to składa się z samych kobiet. Zatem S składa się z samych kobiet.
Na mocy zasady indukcji matematycznej dla dowolnego n zbiór n studentów składa się z samych kobiet.
Niech n =liczba studentów na sali. Wszyscy n studenci na sali są kobietami.
c.b.d.o (co było do okazania).
Wskaż błąd w rozumowaniu.