Ćwiczenia 1 - zadania, *Bartosz Naskręcki*
Notacja:

- $K^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall_i x_i \in K\}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - pierścień reszt modulo n
- $M_{\mathcal{BC}}(T)$ - macierz odwzorowania liniowego $T : V \to W$ względem baz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$.
- $L(V, W)$ - algebra endomorfizmów z V do W.

Zadanie 1
Znaleźć macierz odwzorowania liniowego $T : V \to W$ w zadanych bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$:

1. $V = W = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{1\}$, $T(x) = 6x$.
2. $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$, $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{1\}$, $T(x, y) = x + y$.
3. $V = W = \mathbb{C}$ (przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$),$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{1, i\}$, $T(x + iy) = (1 + i)(x + iy)$ $(i^2 = -1)$.
4. $V = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}[x] : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $W = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{C} = \{1\}$, $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$.
5. $V = \{a+bx+cx^2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x] : a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$, $W = \{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x] : a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$,$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ $T(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2)^2$
6. $V = W = \{a + b\sin(x) + c\cos(x) \in C([0, 1]) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{1, \sin(x), \cos(x)\}$, $T(f(x)) = f'(x)$ (pochodna z funkcji $f \in V$).

Zadanie 2
Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ będzie zbiorem czteroelementowym. Określamy $Map(X, \mathbb{R}) := \{\phi : X \to \mathbb{R}\}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ z określonymi następująco działaniami

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x),$$

$$(a \cdot \phi)(x) = a \cdot \phi(x),$$

gdzie $x \in X$ oraz $\phi, \psi \in Map(X, \mathbb{R})$ i $a \in \mathbb{R}$. Niech $h : X \to X$ będzie permutacją określoną następująco

$$h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 4, h(4) = 1.$$

Sprawdzić, że odwzorowanie $T : Map(X, \mathbb{R}) \to Map(X, \mathbb{R})$

$$T(\phi) = \phi \circ h$$

jest liniowe oraz wyznaczyć jego macierz w bazach

- $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$, $\phi_i(k) = \delta_{ik}$ dla $k \in X$
- $\mathcal{B} = \{\phi_1 + \phi_2, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$, $\mathcal{C} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$.

Zadanie 3
Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $P = \{\sigma : X \to X : \sigma \text{ jest bijekcją}\}$. Niech $T_\sigma(\phi) = \phi \circ \sigma$ będzie endomorfizmem wyznaczonym przez σ na przestrzeni liniowej $Map(X, \mathbb{R})$. Wyznaczyć w bazie $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ określonej w poprzednim zadaniu macierz operatora: $T_{(12)(23)}, T_{(1324)}, T_{id_X}, T_{(123)}$. Podać ogólny przepis na taką macierz.
Udowodnić, że dla dowolnego $\sigma \in P$ macierz T_σ jest nieosobliwa (ma niezerowy wyznacznik) i pokazać, że zachodzi relacja $T_\sigma \circ T_{\sigma^{-1}} = T_{id_X}$, gdzie $id_X(k) = k$ dla dowolnego $k \in X$.
Udowodnić, że dla dowolnego $\sigma \in P$ $T_\sigma^{12} = id_{Map(X,\mathbb{R})}$.

Zadanie 4
Niech $V = \mathbb{R}^2$ i $T : V \to V$ będzie endomorfizmem $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Obliczyć T^k dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Podać macierz tego operatora w bazie $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Zadanie 5
Niech $V = \mathbb{R}^2$ z ustaloną bazą $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Wyznaczyć zbiór $W = \{T \in End(V) : tr(T) = 0, T(1, 1) = (0, 0)\}$ i sprawdzić, że wyznacza on jednowymiarową podprzestrzeń liniową w $End(V)$. Wyznaczyć bazę tej przestrzeni.

Zadanie 6
Niech $V = \mathbb{R}^2$ z ustaloną bazą $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Wyznaczyć wszystkie odwzorowania liniowe $T : V \to V$ takie, że $T(x, 2x) = (x, 2x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7
Niech $V = \mathbb{R}^2$ z ustaloną bazą $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Wyznaczyć wszystkie odwzorowania liniowe $T : V \to V$ takie, że jeśli $x^2 + y^2 = 1$ i $T(x, y) = (u, v)$, to $u^2 + v^2 = 1$.